
Recherche mathématique, sens et finalité

Colloque QSF, « *La vocation de l'Université* »

Antoine Chambert-Loir

Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex

Courriel : Antoine.Chambert-Loir@math.u-psud.fr

Url : <http://www.math.u-psud.fr/~chambert>

Dans cet amphithéâtre qui a vu tant de savants, il est très intimidant d'avoir à se prononcer sur ce qu'est la vocation de l'Université et, en ce qui me concernera plus spécifiquement ici, sur ce qu'est la recherche mathématique à l'Université. Ainsi, les quelques remarques qui vont suivre doivent être considérées non pas comme une *prescription* rigide mais plutôt comme un *sentiment* mouvant.

En préparant cet exposé, j'ai été amené à découvrir deux articles qui, je crois, reflètent assez fidèlement ce que je ressens être (ou devoir être) l'activité universitaire, particulièrement en mathématique.

Dans le premier, « The Idea of University »⁽¹⁾, le philosophe anglais Michael OAKESHOTT décrit une vision idéale de l'Université, maison dans laquelle cohabitent savants (*scholars*), enseignants et étudiants, collectivement engagés dans la poursuite du savoir (*pursuit of learning*). En reprenant le titre d'un ouvrage (1873) du Cardinal américain John Henry NEWMAN, il s'inscrit dans cette tradition qui fait de l'Université un lieu où l'on enseigne tous les savoirs : « [University] is a place of *teaching universal knowledge*. »⁽²⁾

Le second texte, « On Proof and Progress in Mathematics », a été écrit en 1994 par le mathématicien William THURSTON⁽³⁾ (disparu cet été). Il y décrit de façon très personnelle ce qu'est l'activité mathématique, ses modes de communication et les motivations des mathématiciens.

Dans ces deux textes, Université et science mathématique sont toutes deux décrites par elles-mêmes, de façon presque circulaire, et non par rapport à un but prémédité ou une fonction. Ainsi, pour OAKESHOTT, l'Université est « a manner of human activity », une des formes de l'activité humaine. De même, THURSTON définit les mathématiques comme « le plus petit sujet d'étude satisfaisant les propriétés suivantes :

- Les mathématiques comprennent l'étude des entiers ainsi que de la géométrie plane et dans l'espace ;

1. *The Listener*, vol. 43 (1950), p. 424–426 ; reproduit dans *Academic Questions*, vol. 17, n° 1 (2004), p. 23–30

2. NEWMAN (J.), *The Idea of university*, préface (1852), <http://www.newmanreader.org/works/idea/preface.html>

3. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 30, n° 2 (1994), p. 161–177

- Les mathématiques sont l’objet d’étude des mathématiciens ;
- Les mathématiciens sont les individus qui font progresser la compréhension humaine — *human understanding* — des mathématiques. »

Les mathématiques comme *activité humaine*, au même titre que la politique, la musique, la cuisine ou l’amour, où s’exprime tout l’éventail des passions humaines... C’est mû par un *désir* hérité de l’enfance que le mathématicien Andrew WILES a résolu le problème énoncé par FERMAT en 1637 dans la marge d’une traduction de l’*Arithmétique* de DIOPHANTE.

Cette description des mathématiques comme *activité des mathématiciens* évacue, un peu rapidement peut-être, la seconde partie de mon titre, celle de sa finalité. À ce sujet, Laurent SCHWARTZ disait :

« Pour quoi faire des mathématiques ?

Parce que les mathématiques, ça sert à faire de la physique. La physique, ça sert à faire des frigidaires. Les frigidaires, ça sert à y mettre des langoustes, et les langoustes, ça sert aux mathématiciens, qui les mangent et sont alors dans de bonnes dispositions pour faire des mathématiques, qui servent à la physique, qui sert à faire des frigidaires, qui... »

Si cette boutade ne rend évidemment pas justice aux innombrables applications des mathématiques, elle montre bien que l’activité essentielle d’un mathématicien, sa raison d’être, c’est d’abord d’accroître sa compréhension des mathématiques.

Si des tablettes babyloniennes témoignent d’une activité mathématique depuis près de 4000 ans, souvent en lien avec des problèmes de mesure, de taux d’intérêt ou d’astronomie, c’est EUCLIDE (IV^e s. av. J.-C.) que l’on peut considérer comme le point de départ des mathématiques modernes. En effet, ses *ÉLÉMENTS* adoptent une présentation de la pensée mathématique toujours en vigueur aujourd’hui, à savoir une succession de *définitions* d’objets mathématiques, d’*axiomes* qui précisent les relations entre ces objets, et de *théorèmes* qui sont de nouvelles relations que l’on peut déduire des axiomes.

Cependant, l’origine des objets mathématiques, ceux qui intéressent les mathématiciens, n’est pas axiomatique ; ces objets naissent de l’observation, de l’expérience, voire d’une génération spontanée : un objet vient au monde mathématique quand un mathématicien convainc ses collègues que cet objet est digne d’intérêt en lui-même. Je ne crois pas qu’il y ait un critère précis garantissant cet intérêt ; parfois, nommer un objet permet d’*exprimer* l’idée qui lui est rattachée et que l’on ne ressentait auparavant que confusément. La définition précise de l’objet vient alors. La force de cette étape est qu’elle permet de réfléchir sur une base solide, rendant le discours mathématique *réfutable* : au prix d’un éventuel travail acharné, tout mathématicien est en mesure de vérifier le travail d’un collègue, ou en tout cas d’en détecter de manière indiscutable les éventuelles insuffisances.

Le grand moment de la pensée axiomatique est sans doute le tournant du XX^e siècle, lorsque les mathématiciens (les allemands Georg CANTOR, Gottlob FREGE, l’italien Giuseppe PEANO, l’anglais Bertrand RUSSELL) furent confrontés à toute

une série de paradoxes liés à la compréhension de l'infini. C'est grâce à l'introduction d'une axiomatique précise de la théorie des ensembles (entre 1900 et 1925, par Ernst ZERMELO, Abraham FRAENKEL, John VON NEUMANN) que les fondements des mathématiques furent rapidement stabilisés. En 1928, David HILBERT en vint même à suggérer l'existence d'un moyen AUTOMATIQUE pour établir la véracité (ou non) de n'importe quel énoncé mathématique à partir des axiomes qui les gouvernent. Entre 1931 et 1936, Kurt GÖDEL, Alan TURING (dont on fête cette année le centième anniversaire de la naissance) et Alonzo CHURCH apportèrent un démenti cinglant à cet espoir en démontrant que toute axiomatique assez riche pour permettre l'étude de l'arithmétique laisserait de côté des théorèmes dont on ne pourrait dire ni s'ils sont vrais, ni s'ils sont faux. Sur toute cette histoire, je vous recommande l'excellente bande dessinée *Logicomix*⁽⁴⁾

L'approche de TURING est particulièrement intéressante, puisqu'il définit une machine abstraite très simple (mais aussi puissante que nos ordinateurs actuels s'ils n'avaient de limitation de mémoire) formée d'une espèce de programme dotée d'une tête de lecture/écriture pouvant modifier un ruban infini, puis prouve qu'une telle machine ne peut résoudre les problèmes posés par HILBERT. Et, pour mentionner une fois au moins les applications des mathématiques, voilà un exemple où un mouvement de pensée abstrait a débouché sur une réalisation aujourd'hui extrêmement concrète. Si ces mathématiciens cherchaient à comprendre la *nature* du raisonnement mathématique, c'est l'un deux, VON NEUMANN, qui fut amené à *penser* l'ordinateur moderne et son architecture (1945) permettant ainsi que le premier soit construit quelques années plus tard.

En quelque sorte, ces théorèmes sonnent déjà le glas de la méthode axiomatique. Mais il aurait fallu être naïf pour croire que suivre cette méthode était la clé du développement des mathématiques. En 1965, à un moment où les trop fameuses « mathématiques modernes » faisaient rage, un mathématicien publiait la recension suivante d'un article d'un collègue :

« (...) The vocabulary is extensive, the style is cryptic, the examples are all counter-examples to obscure and implausible conjectures.

The author uses the traditional axiomatic approach, with variations. His axioms are basic, and only rarely does he discuss anything as restrictive as a semigroup. There are over 85 definitions for a wide variety for terms, (...) »

Plus sérieusement, imaginez qu'on fournisse aux mathématiciens une machine qui saurait dire si, oui ou non, un énoncé est vrai, voire en donne une preuve. Sonnerait-elle le glas des mathématiques ? Je ne crois pas. La clé est donnée par THURSTON dans la phrase que j'ai citée plus haut : *human understanding* ; du point de vue de la compréhension humaine, la machine extra-terrestre n'apporte rien.

4. A. DOXIADIS, C. PAPADIMITRIOU, *Logicomix : An Epic Search for Truth*, Bloomsbury USA, 352 p.

Il y a des théorèmes dont la vérification fut faite au moyen d'immenses calculs. Dans certains cas, c'est l'ordinateur qui les a rendus possibles, et ces calculs restent cachés ; je pense au *théorème des quatre couleurs*, cité par THURSTON, mais aussi au vieux *problème des sphères* de Kepler, résolu par Thomas HALES en 1998. Dans d'autres, la preuve est entièrement humaine, mais si longue qu'elle échappe à la compréhension : la *classification des groupes finis simples* est un tel exemple : des dizaines de milliers de pages publiées entre 1955 et 2004 dans plusieurs centaines d'articles de journaux par une centaine de mathématiciens différents ; la dernière étape est un livre en deux volumes de plus de mille pages ! Savoir le dénouement de cette histoire est peut-être rassurant, fournit des outils (l'énoncé de cette classification est facile à utiliser) mais n'explique rien. Peut-être pour cette raison, certains mathématiciens répugnent un peu à l'utiliser tandis qu'ailleurs, une nouvelle génération s'attelle à en fournir une meilleure démonstration.

À une échelle plus modeste, il est fréquent de voir les mathématiciens dédaigner une preuve qui traiterait individuellement une série de cas et lui préférer un argument « global » : parfois, une meilleure compréhension conceptuelle du problème fournit la clé d'une démonstration plus simple.

Le point de vue que j'ai développé ici est celui des mathématiques pour elles-mêmes, voire des mathématiques pour soi-même. Bien sûr, les mathématiques sont reliées aux autres activités humaines, et les mathématiques servent d'*outil* à toutes les sciences, et, au moins indirectement, à toute la Société. Pensons aussi à la phrase de GALILÉE selon lequel l'Univers est écrit « en langue mathématique. » Cependant, l'activité mathématique existe indépendamment de telle ou telle application, aussi fondamentale, et elle lui préexiste. Pour résumer, le *sens* de l'activité mathématique me semble être ce mouvement (perpétuel) vers l'amélioration de la compréhension humaine du monde mathématique, monde que je n'ai pas pu décrire autrement qu'en disant que c'est celui que parcourent inlassablement les mathématiciens.